JOURNAL OF ALGEBRA 83, 237–255 (1983)

Teilbarkeitshalbgruppen mit Vollständiger Erweiterung

VON BRUNO BOSBACH

Department of Mathematics, Gesamthochschule Kassel, Universität des Landes Hessen, West Germany

Communicated by G. B. Preston

Received March 23, 1981

ALFRED H. CLIFFORD ZUM GOLDENEN DOKTORJUBILÄUM

This paper deals with d-semigroups admitting conditionally complete extensions. As main results a necessary and sufficient condition is presented for a d-semigroup to admit an Inf- and Sup-continuous conditionally complete cut extension and a necessary and sufficient condition for a (conditionally complete) d-semigroup to admit a cube extension.

0. VORBEMERKUNGEN

Eine Algebra $\mathscr{S} := (S, \cdot, \cap)$ heisst eine Teilbarkeitshalbgruppe, wenn sie den Gesetzen genügt:

(A1) $(S, \cdot)$ ist eine Halbgruppe,

(A2) $(S, \cap)$ ist ein Halbverband,

(A3) $x(a \cap b)\, y = xay \cap xby$,

(A4) $a \leqslant b \Rightarrow \exists x, y{:}\ ax = b = ya$.

Eine Teilbarkeitshalbgruppe heisst positiv, wenn sie $ax \geqslant a \leqslant xa$ erfüllt.

Es wird keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeuten, wenn wir in dieser Note ausgehen von positiven Teilbarkeitshalbgruppen. Sei $\mathscr{S}$ deshalb im folgenden stets eine positive Teilbarkeitshalbgruppe. Dann lässt sich u.a. zeigen:

(0.1) $\mathscr{S}$ ist sup-abgeschlossen, und zwar gilt die Implikation: $b''(a \cap b) = b = (a \cap b)\, b' \Rightarrow ab' = a \cup b = b''a$.

(0.2) $$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c).$$

(0.3) $$x(a \cup b)\, y = xay \cup xby.$$

(0.4) $$a \leqslant bc \wedge (a \cap b)\, a' = a \Rightarrow a = (a \cap b)(a' \cap c).$$

(0.5) Die idempotenten Elemente aus $\mathscr{S}$ liegen im Zentrum und

0021-8693/83 $3.00

bilden eine Unterteilbarkeitshalbgruppe $\mathcal{T}(\mathcal{S})$, die wir auch mit $\mathcal{T}$ bezeichnen.

(0.6) Die Menge der Filter aus $(S, \cap, \cup)$ ist abgeschlossen bezüglich der komplexweisen Verknüpfungen $\cdot, \cap, \cup$.

(0.7) Ist F ein Filter, so liefert die Festsetzung $a \equiv b(F) :\Leftrightarrow \exists f \in F$: $a \cap f = b \cap f$ eine Kongruenz. Dies bedeutet insbesondere, dass die Festsetzung $a \equiv b(c) :\Leftrightarrow a \cap c = b \cap c$ eine Restklassenstruktur liefert, die im folgenden mit $\mathcal{S}_c$ bezeichnet werden soll.

(0.8) Erfüllt $I \subset S$ die Bedingungen $a, b \in I \Leftrightarrow ab \in I$ und $sI = Is$, so nennen wir I ein Ideal aus $\mathcal{S}$. Ist I ein Ideal, so liefert die Festsetzung $a \equiv b(I) :\Leftrightarrow ae = bf$ $(e, f \in I)$ eine Kongruenz, deren Restklassenstruktur mit $\mathcal{S}/I$ bezeichnet sei.

(0.9) Ist $\mathcal{S}$ kommutativ, so bildet die Menge $E(a)$ aller e mit $ae = a$ ein Ideal. Insbesondere bildet daher im Falle $u^2 = u$ die Menge aller x unterhalb u ein Ideal U mit $a \equiv b(U) \Leftrightarrow au = bu$. Das legt nahe, das homomorphe Bild $\mathcal{S}/U$ auch mit $\mathcal{S}u$ zu bezeichnen.

An einigen Stellen dieser Arbeit werden wir komplementäre Teilbarkeitshalbgruppen betrachten. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass für alle $a, b \in S$ die Menge X aller x mit der Eigenschaft $ax \geqslant b$ und die Menge Y aller y mit der Eigenschaft $b \leqslant ya$ jeweils ein Minimum $a * b$ bzw. $b : a$ besitzen. Im Hinblick auf Komplementarität erwähnen wir:

(0.10) Ist $\mathcal{S}$ kommutativ, so ist jedes $\mathcal{S}_a/E(a)$ komplementär [6].

(0.11) Ist $\mathcal{S}$ komplementär, so ist auch jedes $\mathcal{S}/I$ komplementär.

Eine partialgeordnete Halbgruppe heisse (hier) archimedisch, wenn sie das Gesetz erfüllt

$$t^n \leqslant a \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \text{impliziert} \qquad at \leqslant a \geqslant ta. \tag{A}$$

Dann gilt der Satz

(0.13) Jede archimedische Teilbarkeitshalbgruppe und auch jede archimedische komplementäre Halbgruppe ist kommutativ [6].

Wir nennen eine Teilbarkeitshalbgruppe S-vollständig, wenn sie bedingt vollständig ist und das Gesetz erfüllt

$$s = \bigcap a_i \Rightarrow xsy = \bigcap xa_i y. \tag{S}$$

Dual nennen wir $\mathcal{S}$ V-vollständig, wenn $\mathcal{S}$ bedingt vollständig ist und das Gesetz erfüllt

$$s = \bigcup a_i \Rightarrow xsy = \bigcup xa_i y. \tag{V}$$

Neben (S) und (V) wird bei der Charakterisierung der vollständigen Würfelhalbgruppen ein der Verbandstheorie entnommenes Gesetz der vollständigen Distributivität von Bedeutung sein, nämlich

$$\bigcap_{C}\left[\bigcup_{A_\gamma} a_{\gamma,\alpha}\right]=\bigcup_{\Phi}\left[\bigcap_{C} a_{\gamma,\Phi(\gamma)}\right] \qquad (\gamma\in C, \phi(\gamma)\in A_\gamma). \tag{D}$$

Bezüglich bedingt vollständiger Teilbarkeitshalbgruppen gelten unter anderem die Sätze:

(0.14) Jede S- oder V-vollständige Teilbarkeitshalbgruppe ist archimedisch [7] (und somit nach (0.13) auch kommutativ).

(0.15) Ist $\mathscr{S}$ eine V-vollständige Teilbarkeitshalbgruppe ohne 1, so lässt sich $\mathscr{S}$ vermöge seiner Idempotenten grenztreu subdirekt zerlegen in V-vollständige Teilbarkeitshalbgruppen mit 1 [5].

(0.16) Erfüllt eine Teilbarkeitshalbgruppe $\mathscr{S}$ die Axiome (S), (V) und (D), so erfüllt auch jedes $\mathscr{S}_a$ diese Axiome.

Die Untersuchung vollständiger Teilbarkeitshalbgruppen wurde eingeleitet in [5] und fortgesetzt in [6] und [7]. Ziel dieser Note ist eine Erarbeitung von Kriterien für Teilbarkeitshalbgruppen mit vollständigen Erweiterungen. Dabei stellen sich als Hauptergebnisse Charakterisierungen von Teilbarkeitshalbgruppen mit S- und V-vollständiger Schnitterweiterung und von (bedingt vollständigen) Teilbarkeitshalbgruppen mit Würfelerweiterungen ein. Die Arbeit ist—soweit möglich—self-contained gehalten, Notation und Symbolik sind Standard. Tragender Begriff dieser Note ist der—wohl—auf van der Waerden [12] und Arnold [1] zurückgehende und von Clifford [9] modifizierte Begriff des v-Ideals, dessen Arithmetik wir in Abschnitt 1 vorstellen. Daneben erweist sich der dual gebildete Begriff des t-Ideals bezüglich V-Erweiterungen als fruchtbar. Er ist dem Begriff des v-Ideals nachgebildet und verhält sich weitgehend dual.

1. Vollständige Idealerweiterungen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Frage, unter welchen Bedingungen eine Teilbarkeitshalbgruppe eine S-vollständige bzw. eine V-vollständige Erweiterung besitzt. Dabei erweist sich Archimedizität als eine wesentliche notwendige Eigenschaft, was sich aus (0.14) ergibt. Doch anders als im klassischen Fall reicht Archimedizität hier nicht hin. Denn:

Sei $\mathbb{E}$ das Einheitsintervall und ω ein Element, nicht aus $\mathbb{E}$. Setzen wir dann $x\leqslant\omega$ für alle x aus $\mathbb{E}$, $a\cdot b=a+b$, falls diese Summe 1 nicht überschreitet, und $a+b=\omega$ sonst, sowie $a\cap b$ gleich $\min(a,b)$, so bildet $(\mathbb{E},\omega;\cdot,\cap)$ eine positive totalgeordnete Teilbarkeitshalbgruppe, die keiner S-

vollständigen Erweiterung fähig ist, da in einer jeden solchen Erweiterung für $X := \mathbb{E} - \{0\}$ gelten müsste: $\bigcap X \bigcap X = \bigcap XX = \bigcap X$ und daher auch $1 = 1 \cdot \bigcap X = \bigcap 1 \cdot X = \omega$.

Somit haben wir uns um Bedingungen zu bemühen, die zusammen mit der Archimedizität Erweiterungen der gewünschten Art liefern. Das soll in diesem Abschnitt für kürzungstreue Erweiterungen wenigstens teilweise geleistet werden. Dabei spielt das Begriffspaar v-Ideal, t-Ideal eine entscheidende Rolle.

Wir repetieren, bzw. definieren:

DEFINITION. Sei $\mathscr{S}$ eine positive Teilbarkeitshalbgruppe mit 1. Dann nennen wir $\mathscr{A}$ ein v-Ideal (Vielfachen-Ideal), wenn $\mathscr{A}$ alle Elemente c aus S enthält, die der Implikation genügen: $s \leqslant x\mathscr{A}y \Rightarrow s \leqslant xcy$. Dual nennen wir $\mathscr{A}$ ein t-Ideal (Teilerideal), wenn $\mathscr{A}$ alle Elemente c aus S enthält, die der Implikation genügen: $s \geqslant x\mathscr{A}y \Rightarrow s \geqslant xcy$.

Der Begriff des v-Ideals geht zurück auf Arnold [1] und van der Waerden [12], bzw. in modifizierter Form auf Clifford [9]. Die Arithmetik des v-Idealbereichs im nicht kommutativen Fall wurde in [3] präsentiert. Dort zeigte sich unter anderem:

$\mathscr{S}$ ist ein v-Ideal und der nicht leere Durchschnitt einer Familie von v-Idealen ist ein v-Ideal. Daher erzeugt jedes nicht leere $A \subseteq S$ ein eindeutig bestimmtes (engstes) v-Ideal $\underline{A}$. Dies liefert uns die Grundlage für eine Idealmultiplikation. Denn man verifiziert leicht, dass mit $\underline{A} = \underline{A}'$ und $\underline{B} = \underline{B}'$ auch $\underline{AB} = \underline{A'B'}$ erfüllt ist. Weiter bildet im Falle $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{B}$ die Menge aller x mit $\mathscr{A}x \subseteq \mathscr{B}$ ein v-Ideal, das sogenannte Rechtsquotienten-Ideal $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ dem dual das Linksquotientenideal entspricht.

Ganz analog liefern die Schlussweisen aus [6] für t-Ideale:

$\mathscr{S}$ ist ein t-Ideal und der nicht leere Durchschnitt einer Familie von t-Idealen ist ein t-Ideal. Daher erzeugt jedes nicht leere $A \subseteq S$ ein eindeutig bestimmtes (engstes) t-Ideal $\overline{A}$. Dies liefert uns wie oben die Grundlage zu einer Idealmultiplikation, denn es gilt wie oben $\overline{A} = \overline{A}' \wedge \overline{B} = \overline{B}' \Rightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'}$. Weiter bildet in diesem Falle mit $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ die Menge aller x mit $\overline{\mathscr{A}x} \subseteq \mathscr{B}$ ein t-Ideal, das wir als das Rechtsquotienten-Ideal $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ von $\mathscr{A}$ bezüglich $\mathscr{B}$ bezeichnen wollen, dem dual das Linksquotientenideal entspricht.

Offenbar lassen sich die Quotientenoperationen auf beliebige Paare $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ übertragen, indem man im v-Idealbereich $\mathscr{V}$ den Quotienten von $\mathscr{A}$ bezüglich $\mathscr{B}$ erklärt als den Quotienten von $\mathscr{A}$ bezüglich $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ und im t-Idealbereich $\mathscr{T}$ den Quotienten von $\mathscr{A}$ bezüglich $\mathscr{B}$ erklärt als den Quotienten von $\mathscr{A}$ bezüglich $\overline{\mathscr{A} \cup \mathscr{B}}$.

Der grosse Wert der betrachteten Idealbereiche liegt darin, dass sie kürzungstreue Erweiterungen zu $\mathscr{S}$ liefern. Denn offenbar ist die Halbgruppe der Hauptideale[1] $\mathfrak{a} := \underset{\frown}{a}$ bzw. $\mathfrak{a} := \bar{a}$ isomorph zu $\mathscr{S}$, und man verifiziert leicht, dass $\mathfrak{a}$ ein kürzbares v-Ideal (t-Ideal) ist, wenn a ein kürzbares Element aus $\mathscr{S}$ darstellt. Das bedeutet aber aufgrund der soeben dargelegten Sachverhalte, dass der v-Idealbereich eine S-vollständige Erweiterung liefert, wenn $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \mid \mathscr{B}$ erfüllt ist, während der t-Idealbereich eine V-vollständige Erweiterung zu $\mathscr{S}$ liefert, wenn er $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \mid \mathscr{B}$ erfüllt, wobei $\mathscr{A} \mid \mathscr{B}$ in beiden Fällen beinhalten soll, dass $\mathscr{B}$ sich sowohl in der Form $\mathscr{A}\mathscr{X}$ als auch in der Form $\mathscr{Y}\mathscr{A}$ darstellen lässt.

Wir vereinbaren weiter: Ist Σ eine Oberhalbgruppe zu $\mathscr{S}$, so sei für alle $\Lambda \subseteq \Sigma$ definiert: $[\Lambda] := \{x \mid x \in S \wedge x \leqslant \Lambda\}$ sowie $(\Lambda) := \{x \mid x \in S \wedge \Lambda \leqslant x\}$. Natürlich kann (Λ) leer sein, wenn $\mathscr{S}$ keine 0 besitzt, und es kann $[\Lambda]$ leer sein, wenn $\mathscr{S}$ keine 1 besitzt. Aus diesem Grunde vereinfacht sich die Darstellung, wenn wir im folgenden $\mathscr{S}$ als eine positive Teilbarkeitshalbgruppe mit 1 und 0 annehmen. Die damit in Kauf genommene Beschränkung der Allgemeinheit ist unwesentlich, da weder die Adjunktion der 1 noch die Adjunktion der 0 Einfluss auf die Kürzbarkeit eines Elementes nimmt.

Besitze deshalb $\mathscr{S}$ eine 1 und eine 0. Dann folgt:

SATZ 1. *$\mathscr{S}$ besitzt genau dann eine S-vollständige Schnitterweiterung, wenn $\mathscr{V}$ das Gesetz erfüllt:*

$$[\mathscr{A}]^n \subseteq [\mathscr{B}]\ (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}, \tag{SS}$$

und es ist in diesem Falle jede S-vollständige Schnitterweiterung isomorph zum Bereich $\mathscr{V}$ der v-Ideale.

Beweis. (a) Ist Σ eine S-vollständige Schnitterweiterung zu $\mathscr{S}$, so gilt zunächst für jedes v-Ideal aus $\mathscr{S}$ die Gleichung:

$$\underline{A} \doteq \left(\bigcap A\right)$$

Denn, da Σ Schnitterweiterung zu $\mathscr{S}$ sein sollte, haben wir $\bigcap A = \bigcup\, [A]$, so dass sich

$$\begin{aligned} c \in \underline{A} &\Rightarrow c \in ([A]) \\ &\Rightarrow c \in \left(\bigcup\, [A]\right) \\ &\Rightarrow c \in \left(\bigcap A\right), \end{aligned}$$

[1] Man beachte, dass offenbar $\mathfrak{a} = \{x \mid a \leqslant x\}$ und $\bar{a} = \{x \mid x \leqslant a\}$ gegeben ist.

also

$$\underline{A} \subseteq \left(\bigcap A\right)$$

ergibt, und gilt $s, t \in S$, so folgt

$$\begin{aligned} s \mid At &\Rightarrow s \mid t \bigcap A \\ &\Rightarrow s \,\Big|\, \left(\bigcap A\right) t, \end{aligned}$$

also

$$\underline{A} \supseteq \left(\bigcap A\right).$$

Damit sind genau die Mengen (α) aus Σ v-Ideal in $\mathscr{S}$. Betrachten wir nun die Abbildung ϕ: $\alpha \to (\alpha)$, so folgt:

$$\begin{aligned} s \mid (\alpha)(\beta) &\Rightarrow s \,\Big|\, \bigcap (\alpha)(\beta) \\ &\Rightarrow s \,\Big|\, \bigcap (\alpha) \bigcap (\beta) \\ &\Rightarrow s \mid \alpha\beta \\ &\Rightarrow s \mid (\alpha\beta), \end{aligned}$$

wonach Σ sich als isomorph zu $\mathscr{V}$ erweist.

(b) Wir zeigen nun, dass sich aus Axiom (SS) die beiden nachfolgenden Aussagen (i) und (ii) herleiten lassen.

$$\mathscr{A} \supseteq \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \mid \mathscr{B} \tag{i}$$

$$\underline{A} = ([A]) \tag{ii}$$

Zu (i). Wir dürfen $\mathscr{B} = \underline{b} =: \mathscr{b}$ und $\mathscr{A} = \underline{A}$ mit $a \leqslant b$ $(\forall a \in A)$ annehmen und $\mathscr{X} := \mathscr{A}/\mathscr{b} = \underline{X}$ mit $x \leqslant b$ $(\forall x \in X)$ als gegeben erachten.

Offenbar gewährleistet (SS), dass $\mathscr{S}$ archimedisch ist und hieraus folgt wegen $(t_1 \cup t_2)^2 \geqslant t_1 t_2$, dass $\mathscr{A}\mathscr{b} = \mathscr{b}$ eintritt, wenn $t \leqslant \mathscr{A} \Rightarrow t^n \leqslant b$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ erfüllt ist.

Sei nun $c \leqslant AX$ und $d = b \cup c$. Ist dann $t \leqslant \mathscr{b}/\mathscr{d}$, so folgt zunächst

$$\begin{aligned} ax \geqslant d \geqslant b &\Rightarrow x \in \mathscr{a}/\mathscr{d} \wedge a \in \mathscr{x}/\mathscr{d} \qquad (a \in A, x \in X) \\ &\Rightarrow x \in \mathscr{b}/\mathscr{d} \wedge a \in \mathscr{b}/\mathscr{d}. \end{aligned}$$

Das liefert weiter für jedes $t \supseteq \mathscr{b}/d$ die Implikation

$$\begin{aligned} ax \geqslant b &\Rightarrow t(t/\mathscr{a})\, t(t/\mathscr{x}) \subseteq t(t/d) = d \\ &\Rightarrow (t/\mathscr{a})\, t(t/\mathscr{x}) \subseteq t/d. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Nun ist aber $(t/\mathscr{b})(\mathscr{b}/d) \subseteq t/d$, und es gilt wegen $t \leqslant b \leqslant d$ auch umgekehrt $t/d \subseteq (t/\mathscr{b})(\mathscr{b}/d)$. Denn haben wir

$$tu = b \wedge bv = d \wedge y \in t/d,$$

so folgt

$$t(y \cap u) = b \wedge b(y' \cap v) = d$$

für jedes y' mit $(y \cap u)\, y' = y$, so dass sich

$$y \in t/d \Rightarrow y = y_1 y_2 \qquad \text{mit} \qquad y_1 \in t/\mathscr{b}, \quad y_2 \in \mathscr{b}/d$$

einstellt.

Das liefert vermöge $(*)$

$$\begin{aligned} \mathscr{a}(t/\mathscr{x}) &\subseteq (t/\mathscr{b})(\mathscr{b}/d) \\ &\subseteq t(t/\mathscr{b}) \\ &= \mathscr{b}, \end{aligned}$$

so dass für alle $x \in X$ die Inklusion $t/\mathscr{x} \subseteq \mathscr{X}$ und damit auch

$$\mathscr{X} t \supseteq \underline{t(t/\mathscr{x})} \supseteq \mathscr{X} \supseteq \mathscr{X} t$$

also $\mathscr{X} = \mathscr{X} t$ gegeben ist. Hieraus folgt aber sofort $t^n \mathscr{X} = \mathscr{X}$ und damit $t^n \leqslant b$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ bzw. $bt = b$, was nach unserer Vorbemerkung $\mathscr{b} = \mathscr{b}(\mathscr{b}/d) = d$, also auch $b \geqslant c$ und deshalb $[\mathscr{b}] = [\mathscr{A}\mathscr{X}]$ gewährleistet.

Es gibt also ein $\mathscr{Y}$ mit $\mathscr{b}\mathscr{Y} = \mathscr{A}\mathscr{X}$, und es gilt nach dem Gezeigten für alle Teiler t von $\mathscr{Y}$ die Gleichung $bt = b$, so dass—wieder nach unserer Vorbemerkung—$\mathscr{A}\mathscr{X} = \mathscr{b}\mathscr{Y} = \mathscr{b}$ eintritt.

Zu (ii). Wir zeigen nun $\underline{A} = ([A])$. Sei hierzu $[\mathscr{A}] = [\mathscr{B}]$. Dann folgt $[\mathscr{A}] = [\mathscr{A} \cup \mathscr{B}] = [\mathscr{B}]$, und hieraus ergibt sich für alle t mit $t \leqslant \mathscr{X} := \underline{(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})}/\mathscr{A}$ zunächst die Inklusion:

$$[\mathscr{A} \cup \mathscr{B}] \cdot t \subseteq [\mathscr{A}] \subseteq [\mathscr{A} \cup \mathscr{B}]$$

und daher weiter $[\mathscr{A} \cup \mathscr{B}] \cdot t^n \subseteq [\mathscr{A} \cup \mathscr{B}]$, so dass sich $\mathscr{A} = \underline{(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})\mathscr{X}} = \underline{\mathscr{A} \cup \mathscr{B}}$ einstellt, was aus Gründen der Dualität $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ bewirkt. Dies liefert insbesondere, dass jedes v-Ideal gleich dem Durchschnitt seiner Hauptidealteiler ist, was unsere Behauptung liefert. ∎

Dual zu Satz 1 erhalten wir

SATZ 2. *$\mathscr{S}$ besitzt genau dann eine V-vollständige Schnitterweiterung, wenn die Bedingungen gelten*:

$$\mathscr{S} \textit{ ist archimedisch und } \mathscr{T} \textit{ erfüllt } \bar{A} = [(A)], \tag{SV}$$

und es ist in diesem Falle jede V-vollständige Schnitterweiterung isomorph zum Bereich $\mathscr{T}$ der t-Ideale.

Beweis. Die aufgestellte Bedingung ist notwendig, was sich dual zu den unter Satz 1 gemachten Ausführungen ergibt, und existiert eine Erweiterung der angegebenen Art, so erhalten wir einen Isomorphismus zwischen $\mathscr{T}$ und Σ vermöge $\phi\colon \mathfrak{a} \to [\alpha]$, was sich ebenfalls dual ergibt.

Die aufgestellte Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn: Mit (SV) erfüllt $\mathscr{S}$ zunächst die Gleichung

$$\bar{A} = [(A)]. \tag{i}$$

Wir beweisen nun

$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \mid \mathscr{B} \tag{ii}$$

für $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ aus $\mathscr{T}$. Sei zu diesem Zweck vorab der Sonderfall $A \leqslant \mathfrak{b}$ gegeben mit $X := \{x \mid Ax \leqslant \mathfrak{b}\}$. Dann folgt $c \geqslant Ax \Rightarrow c \cap b = d \geqslant Ax$ und daher für alle s mit $ds = b$ die Implikation

$$AX \subseteq \mathfrak{b} \Rightarrow AX \subseteq d \Rightarrow AXs \subseteq \mathfrak{b}$$

so dass $Xs^n \subseteq \mathfrak{d}$ und somit $s^n \leqslant d$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gegeben ist. Das führt aber zu $d = ds = b$ und damit zu $\mathfrak{b} = [(b)] = [(AX)] = \overline{AX}$, so dass sich im Sonderfall $A = \bar{A}$ die Gleichung $\overline{AX} = \bar{b}$ einstellt.

Ist nun $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, b aus $\mathscr{B}$ und $\mathscr{A}_b = \{b \cap a \mid a \in \mathscr{A}\}$, so haben wir mit geeignetem $\mathscr{X}_b$ die Beziehungen $\mathfrak{b} = \mathscr{A}_b\mathscr{X}_b \subseteq \mathscr{A}\mathscr{X}_b$ und $\mathscr{A}\mathscr{X}_b \subseteq \mathscr{B}$, die erste nach dem soeben Gezeigten, die zweite wegen $x \in \mathscr{X}_b \Rightarrow ax = a''(a \cap b)x \leqslant a''b = a \cup b$. Daher folgt $\mathscr{B} = \mathscr{A}\mathscr{X}$ mit $\mathscr{X} = \bar{\mathscr{X}}_i$, worin $\mathscr{X}_i$ die Menge aller oben gebildeten $\mathscr{X}_b$ durchläuft. ∎

Satz 1 und Satz 2 liefern jeweils eine Basis für die Charakterisierung von Teilbarkeitshalbgruppen mit S- und V-vollständiger Schnitterweiterung. Dies sei demonstriert bezüglich des Satzes 1.

SATZ 3. *$\mathscr{S}$ besitzt eine S- und V-vollständige Schnittalgebra genau dann, wenn das Axiom* (SS) *erfüllt ist und zusätzlich gilt*: $\mathfrak{a} \bigwedge \mathfrak{b}_i = \bigwedge \mathfrak{a}\mathfrak{b}_i$.[2]

[2] Hier und im folgenden bezeichne $\bigwedge$ den mengentheoretischen Durchschnitt, $\bigvee$ die mengentheoretische Vereinigung.

Beweis. Es ist das Gesetz zu verifizieren

$$\mathscr{A} \bigwedge \mathscr{B}_i = \bigwedge \mathscr{A}\mathscr{B}_i.$$

Dies ist für Hauptideale nach Voraussetzung gewährleistet. Ist nun $\mathscr{A} = \underline{A}$, so existiert zu jedem $a \in A$ ein $\mathscr{X}_a$ mit $a = \mathscr{A}\mathscr{X}_a$ und hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \bigwedge \mathscr{b}_i &\supseteq \mathscr{X}_a \mathscr{A} \bigwedge \mathscr{b}_i \\ &= a \bigwedge \mathscr{b}_i \\ &= \bigwedge a\mathscr{b}_i \\ &= \bigwedge \mathscr{X}_a \mathscr{A} \mathscr{b}_i \\ &\supseteq \mathscr{X}_a \bigwedge \mathscr{A}\mathscr{b}_i, \end{aligned}$$

woraus sich wegen $(\bigvee \mathscr{X}_a)\mathscr{A} = \mathscr{A}$ und $\mathscr{A} \supseteq \bigwedge \mathscr{A}\mathscr{b}_i$ dann weiter die Inklusion $\mathscr{A} \bigwedge \mathscr{b}_i \supseteq \bigwedge \mathscr{A}\mathscr{b}_i$ und somit unsere Bedingung für den Sonderfall ergibt, dass die $\mathscr{B}_i$ Hauptideale sind. Seien nun die $\mathscr{B}_i$ beliebig. Dann gilt nach dem Bisherigen

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \bigwedge \mathscr{B}_i &= \mathscr{A} \bigwedge \left(\bigwedge \mathscr{b}_{ki}\right) \qquad (ki \in K_i, i \in I) \\ &= \mathscr{A} \bigwedge \mathscr{b}_{ki} \\ &= \bigwedge \mathscr{A}\mathscr{b}_{ki} \\ &= \bigwedge \mathscr{A}\mathscr{B}_i. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Neben den bislang vorgestellten Kriterien sollen im weiteren hinreichende Bedingungen präsentiert werden, die in klassischen Teilbarkeitshalbgruppen z.T. a fortiori erfüllt sind (vgl. z.B. [6]).

SATZ 4. *Erfüllt $\mathscr{S}$ die Gleichung $[A][B] = [AB]$, so besitzt $\mathscr{S}$ eine S-vollständige Schnitterweiterung.*

Beweis. Sei $A \neq \varnothing$ und $X = \{x \mid Ax \geqslant b\}$. Dann folgt

$$b \in [A][X] \Rightarrow b = b_A b_X$$

mit $b_A \leqslant A$ und $b_X \leqslant X$, so dass unter allen x mit $Ax \geqslant b$ ein eindeutig bestimmtes kleinstes $A * b$ und dual unter allen y mit $yA \geqslant b$ ein eindeutig bestimmtes kleinstes $b{:}A$ existiert. Dies sichert uns $[A] = [B] \Rightarrow \underline{A} = \underline{B}$, denn $[A] = [B]$ impliziert $s \mid uAv \Leftrightarrow (s:v) \mid uA \Leftrightarrow (u * (s:v)) \mid A \Leftrightarrow (u * (s:v)) \mid B$, so dass $\mathscr{V}$ Schnittalgebra zu $\mathscr{S}$ ist.

Sei nun $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{b}$, $\mathscr{A} * b = u$ und $b \leqslant d \leqslant \mathscr{A}u$. Dann folgt $d{:}u \leqslant A$ und daher $d{:}u \leqslant b$, also $b = (d{:}u)y$ mit geeignetem y, und dies liefert weiter

$Ay \geqslant b$, also $y \geqslant u$, also $b = (d:u)y \geqslant (d:u)u = d$. Somit sind die Teiler von $\mathscr{A}u$ dieselben wie die Teiler von $\mathscr{b}$, was $\mathscr{A}u = \mathscr{b}$ liefert. Der Rest ist eine unmittelbare Konsequenz aufgrund der v-Ideal-Arithmetik. ∎

Erwartungsgemäss gilt neben Satz 4 der

SATZ 5. *Erfüllt $\mathscr{S}$ die Gleichung $(A)(B) = (AB)$, so besitzt $\mathscr{S}$ eine V-vollständige Schnitterweiterung.*

Beweis. Sei in $\mathscr{E}\mathscr{b} \supseteq \mathscr{A}$ und $\mathscr{X} = \mathscr{A}/\mathscr{b}$ gegeben. Dann gilt $b \geqslant \mathscr{A}\mathscr{X}$, also $b = b_{\mathscr{A}} b_{\mathscr{X}}$ mit $b_{\mathscr{A}} \geqslant \mathscr{A}$ und $b_{\mathscr{X}} \geqslant \mathscr{X}$, so dass $b_{\mathscr{X}}$ Maximum in $\mathscr{X}$ ist. Dies liefert

$$\begin{aligned} c \geqslant \mathscr{A}\mathscr{X} &\Rightarrow d = b \cap c \geqslant \mathscr{A}\mathscr{X} \\ &\Rightarrow d = d_{\mathscr{A}} d_{\mathscr{X}} \qquad \text{mit} \qquad d_{\mathscr{A}} \geqslant \mathscr{A} \wedge d_{\mathscr{X}} \geqslant \mathscr{X}, \end{aligned}$$

woraus sich weiter

$$\begin{aligned} b = d_{\mathscr{A}} d_{\mathscr{X}} s &\Rightarrow d_{\mathscr{X}} s \in \mathscr{X} \\ &\Rightarrow d_{\mathscr{X}} s \leqslant d_{\mathscr{X}} \\ &\Rightarrow d = d_{\mathscr{A}} d_{\mathscr{X}} = d_{\mathscr{A}} d_{\mathscr{X}} s = b \end{aligned}$$

ergibt. Daher haben wir $(\mathscr{A}\mathscr{X}) = (\mathscr{b})$, und wir können dual zum Beweis von Satz 4 die Gleichung $\bar{A} = [(A)]$ herleiten. Somit ist der Anschluss an den Beweis unter Satz 2 hergestellt, denn man beachte, dass in dem letzten Teil jenes Beweises die Kommutativität nicht herangezogen wurde. ∎

Nach Satz 4 impliziert $[A][B] = [AB]$ zum einen Archimedizität und zum andern natürlich $[a][B] = [aB]$. Nun ist aber die letzte Bedingung gleichbedeutend damit, dass es zu allen $a \leqslant b$ ein kleinstes x mit $ax \geqslant b$ gibt, was die Beweisführung zu Satz 4 praktisch mitgeliefert hat. Entsprechend erhält man, dass $(a)(B) = (aB)$ gleichbedeutend damit ist, dass es zu jedem $a \leqslant b$ ein grösstes x mit $ax \leqslant b$ gibt.

Teilbarkeitshalbgruppen mit $[a][B] = [aB]$ sind demzufolge (v-) komplementär (vgl. [3]) und Teilbarkeitshalbgruppen mit der Eigenschaft $(a)(B) = (aB)$ sollen hier als t-komplementär bezeichnet werden. Dann gelten:

SATZ 6. *Ist $\mathscr{S}$ archimedisch und v-komplementär, so besitzt $\mathscr{S}$ eine S-vollständige Schnitterweiterung.*

Denn es folgt wie unter Satz 4 $\underline{A} = ([A])$, und es kann im Beweis zu Satz 1 das Element $b * d$ anstelle des allgemeinen t gewählt werden.

SATZ 7. *Ist $\mathscr{S}$ archimedisch und t-komplementär, so besitzt $\mathscr{S}$ eine V-vollständige Schnitterweiterung.*

Denn es folgt wie unter Satz 5 die Gleichung $\bar{A} = [(A)]$, und es kann wegen der Archimedizität die Herleitung der Implikation $\mathscr{A} \subseteq \ell \Rightarrow \mathscr{A} \mid \ell$ aus dem Beweis zu Satz 2 übernommen werden.

Satz 6 bezieht sich auf komplementäre Teilbarkeitshalbgruppen. Indes, eine komplementäre Halbgruppe muss nicht $\cap$-abgeschlossen sein, so dass im Hinblick auf komplementäre Halbgruppen explizit formuliert und bewiesen werden sollte:

SATZ 8. *Eine komplementäre Halbgruppe besitzt genau dann eine S-vollständige Erweiterung, wenn sie archimedisch ist.*

Beweis. Wie oben zeigt man dass $\underline{A} = ([A])$ erfüllt ist. Gilt nun $\ell \subseteq \mathscr{A}$ und $\mathscr{X} = \mathscr{A}/\ell$, so haben wir im Falle $c \leqslant \mathscr{A}\mathscr{X}$ auch $d = b \cup c \leqslant \mathscr{A}\mathscr{X}$, so dass wegen $b \in \mathscr{A} \wedge b \in \mathscr{X}$ für alle a, x mit $a \in \mathscr{A}$, $x \in \mathscr{X}$ dann $x \geqslant b * d$ und $a \geqslant b * d$ gegeben ist. Hieraus leitet sich weiter für jedes a, x die Implikation ab (vgl. auch Satz 1)

$$\begin{aligned} ax = (b * d)((b * d) * a)(b * d)((b * d) * x) &\geqslant (b * d)((b * d) * b)(b * d) \\ \Rightarrow ((b * d) * a)(b * d)((b * d) * x) &\geqslant ((b * d) * b)(b * d) \\ \Rightarrow a((b * d) * x) &\geqslant b, \end{aligned}$$

so dass $\underline{(b * d)\mathscr{X} = \mathscr{X} = (b * d)^n}\,\mathscr{X}$ und daher $(b * d)^n \leqslant b$, also auch $b = b(b * d) = d \geqslant c$ eintritt. ∎

Aufgrund der bisherigen Resultate sind wir u.a. in der Lage, eine in [7] offen gebliebene Frage zu beantworten. Denn:

Der Beweis zu Satz 2 zeigte, dass in archimedischen Teilbarkeitshalbgruppen stets $\ell \supseteq \mathscr{A} \Rightarrow b = \mathrm{Sup}(\mathscr{A}(\mathscr{A}/\ell))$ erfüllt ist. Das liefert als Verschärfung von Satz 7 den

SATZ 9. *Ist $\mathscr{S}$ archimedisch und gilt $s = \mathrm{Sup}(a_i) \Rightarrow st = \mathrm{Sup}(a_i t)$, so besitzt $\mathscr{S}$ eine V-vollständige Erweiterung.*

Hiernach erhalten wir als eine Ergänzung zu [7, Satz 5] das

KOROLLAR. *Ist $\mathscr{S}$ V-vollständig, so ist auch der t-Idealbereich zur* 1-*Erweiterung von $\mathscr{S}$ V-vollständig.*

Denn offenbar gilt unsere Distributivitätsforderung für alle kürzbaren t, und ist t nicht kürzbar sowie $te = t$, so folgt $\mathrm{Sup}(a_i t) = \mathrm{Sup}(a_i e)t = t\,\mathrm{Sup}(a_i e) \geqslant t\,\mathrm{Sup}(a_i)$.

Zum Abschluss dieses Paragraphen stellen wir noch ein Ergebnis über S-

normale Erweiterungen vor, d.h. S-vollständige Erweiterungen, in denen jedes α as Infimum einer Teilmenge A aus S aufgefasst werden kann.

SATZ 10. *Eine positive Teilbarkeitshalbgruppe $\mathscr{S}$ besitzt eine S-normale Erweiterung Σ genau dann, wenn $\mathscr{V}$ die Bedingungen erfüllt*:

$$\mathscr{A}^n \supseteq \mathscr{B} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$$

$$\mathscr{A} \supseteq \mathscr{B} \supseteq \mathscr{A}/\mathscr{b} \ (\forall\, b \in \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A}^n \supseteq \mathscr{B} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Beweis. (a) Ist Σ eine S-normale Erweiterung zu $\mathscr{S}$, so liefert h: $\bigcap A \rightarrow \underline{A}$ eine Funktion von Σ auf $\mathscr{V}$, denn $\bigcap A = \bigcap B$ impliziert $s \mid uAv \Leftrightarrow s \mid uBv$, also $\underline{A} = \underline{B}$, und es ist h offenbar sogar ein Homomorphismus. Somit gilt im Bereich der v-Ideale $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \mid \mathscr{B}$, weshalb $\mathscr{V}$ S-vollständig und deshalb auch archimedisch sein muss, was unter Berücksichtigung von $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{B} \supseteq \mathscr{A}/\mathscr{b}$ $(\forall b \in \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A}^n \supseteq \mathscr{B}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ die Notwendigkeit der aufgestellten Implikationen belegt.

(b) Wir zeigen nun, dass die aufgestellte Bedingung auch hinreicht. Seien hierzu A, X, $\mathscr{A}$, $\mathscr{X}$, b gewählt wie im Beweis zu Satz 1, und seien $a \in A$ und $x \in X$ gegeben. Dann folgt

$$ax \geqslant b, \qquad \text{also} \quad x = us \quad \text{mit} \quad au = b$$

und daher

$$au(a \cap s) \in \mathscr{A}(\mathscr{A}/\mathscr{b}) =: \mathscr{C}.$$

Wir setzen $(\underline{a \cap s})/(\underline{a \cap s})_{\mathscr{u}} =: \mathscr{D}$. Dann folgt

$$a\mathscr{D} = \mathscr{b} \qquad \text{und} \qquad \mathscr{D} = (\underline{a \cap s})/(\underline{a \cap s})_{\mathscr{u}} \supseteq (\underline{a \cap s})/\mathscr{x} \supseteq (\mathscr{b}/\mathscr{C})/\mathscr{x},$$

und hieraus ergibt sich die Implikation

$$\mathscr{A}((\mathscr{b}/\mathscr{C})/\mathscr{x}) \subseteq \mathscr{b} \Rightarrow (\mathscr{b}/\mathscr{C})/\mathscr{x} \subseteq \mathscr{X} \subseteq \mathscr{b}/\mathscr{C} \qquad (\forall x \in \mathscr{X}),$$

die uns zunächst $(\mathscr{b}/\mathscr{C})^n \supseteq \mathscr{X}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ und somit nach Voraussetzung weiter $\mathscr{C} = \mathscr{b}(\mathscr{b}/\mathscr{C}) = \mathscr{b}$, d.h. die Behauptung liefert. ∎

2. TEILBARKEITSHALBGRUPPEN IM WÜRFEL

Mit $\mathscr{E}$ soll im folgenden die Teilbarkeitshalbgruppe $(\mathbb{E}, \cdot, \cap)$ bezeichnet werden, deren Multiplikation vermöge der Festsetzung $a \cdot b := \min(1, a + b)$ und deren Schnittoperation vermöge der Festsetzung $a \cap b := \min(a, b)$ erklärt sei. $\mathscr{E}^\omega$ ist dann der ω-dimensionale Würfel betrachtet bezüglich der Stellenoperationen.

Mit $\mathscr{S}_n$ bezeichnen wir im weiteren die Teilbarkeitshalbgruppe, deren Trägermenge gleich $\{0, 1,..., n\}$ ist und deren Operationen erklärt sind wie oben, mit n in der Rolle von 1. Offenbar ist dann jedes $\mathscr{S}_n$ Unterteilbarkeitshalbgruppe von $\mathscr{E}$. Ziel dieses Abschnitts ist eine Charakterisierung der "Würfelhalbgruppen," d.h. jener Teilbarkeitshalbgruppen, die sich einbetten lassen in ein $\mathscr{E}^\omega$. Hierzu beachten wir zunächst den Umstand, dass jede Teilbarkeitshalbgruppe eine natürliche Erweiterung durch ihre Filtermenge besitzt, die ihrerseits zwar nicht notwendig eine Teilbarkeitshalbgruppe bildet, wohl aber eine volldistributive Verbandshalbgruppe, sofern man $\cdot$, $\cap$, $\cup$ jeweils als Komplexoperationen erklärt. Daneben besitzt jede Teilbarkeitshalbgruppe eine zweite natürliche Erweiterung in ihrem v-Idealbereich, die ebenfalls nicht notwendig den Gesetzen der Teilbarkeitshalbgruppe genügt, wohl aber als eine natürliche "Infimumerweiterung" gesehen werden darf. Daher liegt es nahe, das besondere Zusammenspiel von Filtern und v-Idealen im Würfel zur Charakterisierung seiner Unterhalbgruppen heranzuziehen.

Wir formulieren und beweisen:

SATZ 11. *Eine positive Teilbarkeitshalbgruppe $\mathscr{S}$ ist eine Würfelhalbgruppe genau dann, wenn sie der nachfolgenden Bedingung genügt: Gilt für den Filter A und alle n aus $\mathbb{N}$ die Beziehung $A^n \supseteq \mathscr{b}$, so erfüllt das von A erzeugte v-Ideal $\mathscr{A}$ die Gleichung $\mathscr{A}\mathscr{b} = \mathscr{b}\mathscr{A}$.*

Wir bemerken vorweg, dass wir o.B.d.A. die Existenz einer 1 annehmen dürfen, da sich erforderlichenfalls eine 1 "ankleben" lässt. (Man setze $1a := a1$, $1 \cap a := 1$). Hiernach kommen wir zum

Beweis. (a) Die aufgestellte Bedingung ist notwendig, denn: Ist $\mathscr{S}$ eingebettet in $\mathscr{E}^I$, so gilt für alle $i \in I$ mit $i(b) < 1$

$$\mathrm{Inf}(i(a))(a \in A) = 0,$$

da es sonst ein $\varepsilon > 0$ gäbe mit $i(a) \geqslant \varepsilon$ $(\forall a \in A)$, also auch ein $n \in \mathbb{N}$ mit $i(x) > i(b)$ $(\forall x \in A^n)$ im Widerspruch zu $b \in A^n$. Das bedeutet weiter

$$(i(s) \leqslant ((i(a) + i(b) + i(t))\ (\forall a \in A))) \Rightarrow (i(s) \leqslant i(b) + i(t)).$$

(b) Die aufgestellte Bedingung ist hinreichend, denn: Sie impliziert zunächst unmittelbar die Eigenschaft der Archimedizität, also auch Kommutativität.

Ist nun $a \neq b$ in $\mathscr{S}$, so werden a und b durch einen Homomorphismus genau dann getrennt, wenn $a \cap b$ und $a \cup b$ getrennt werden, weshalb wir uns auf den Fall $a < b$ beschränken können.

Wir unterscheiden die Fälle:

$$\exists x\colon ax \leqslant b \wedge ax \neq ax^2 \tag{i}$$

und

$$ax \leqslant b \Rightarrow ax = ax^2 \tag{ii}$$

Zu (i). Offenbar sind wir fertig, wenn wir a und ax trennen können, und—ebenfalls—offenbar gibt es kein e mit $ae = ax = axe$, da sonst $ax = aex = ax^2$ folgen würde. Dann werden aber in dem homomorphen Bild $\mathscr{S}_{ax}/E(ax) =: \bar{\mathscr{S}}$ die Elemente a und ax getrennt, und es ist $\bar{\mathscr{S}}$ eine archimedische komplementäre Teilbarkeitshalbgruppe. Denn, dass $\bar{\mathscr{S}}$ komplementär ist, wurde unter [6, 4.3] gezeigt und dass $\bar{\mathscr{S}}$ archimedisch ist, ergibt sich daraus, dass aus $\bar{t}^n \leqslant \bar{s} \neq \bar{0}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nach [6, 4.7] sogar $\bar{t} = \bar{1}$ resultiert. Wir zeigen nun, dass eine archimedische komplementäre Teilbarkeitshalbgruppe $\mathscr{S}$ mit 0 zu jedem $a \neq 0$ einen a und 0 trennenden Teilbarkeitshalbgruppenhomomorphismus in $\mathscr{E}$ besitzt. Dies gelingt uns, indem wir das Problem auf den Fall $a^2 = 0$ reduzieren, was sich wie folgt einrichten lässt:

Gilt nicht $a^2 = 0$, so können wir im Falle $a \leqslant x \neq x^2 \neq x^3$ übergehen zu $\mathscr{S}_{x^2}/E(x^2)$, um hier $\bar{x}$ und $\bar{x}^2$ zu trennen, während wir im Falle $a \leqslant x \Rightarrow x^2 = x^3$ vermöge $\varphi\colon s \to (as)^2$ zu einem Homomorphismus von $(S, \cdot, \cap)$ auf einen distributiven Verband gelangen, der uns dann ein 2-elementiges a und 0 trennendes Bild liefert. (Man beachte $(x \cap y)^2 = x^2 \cap y^2$, eine Folge von $xy \cup (x^2 \cap y^2) = x(x \cup y) \cap y(x \cup y) = (x \cap y)(x \cup y) = xy$).

Sei also $\mathscr{S}$ komplementär und berandet und weiter $a \neq a^2 = 0$. Dann gilt $p := a * 0 \leqslant a$, und es gibt wegen $pa \neq a$ ein Paar $x \in S$, $n \in \mathbb{N}$ mit $p^n x = a \wedge p^{n+1} \nleqslant a$. Wir bilden $\bar{\mathscr{S}} := \mathscr{S}/E(a)$. Dann gilt $\bar{p} * \bar{x} \cap \bar{x} * \bar{p} = \bar{1}$ wegen der Gleichung $(p \cap x)(p * x \cap x * p) = p \cap x$, und $\bar{x} * \bar{p} \neq \bar{1}$, da sonst $p^n x(x * p) = a(x * p) = a$, also $p^{n+1} \leqslant a$ gegeben wäre. Daher ist $\bar{Y} := \{\bar{y} \in \bar{S} \mid \bar{x} * \bar{p} \cap \bar{y} = \bar{1}\}$ nach (0.4) ein Ideal in $\bar{\mathscr{S}}$, das $\bar{p} * \bar{x}$ enthält, nicht aber $\bar{p}$. Somit existiert in $\mathscr{S}$ ein Ideal M mit $p * x \in M \wedge p \notin M$, das unter allen Idealen mit dieser Eigenschaft maximal ist. Dann ist aber $\mathscr{S}/M$ frei von eigentlichen Idealen wegen $p^{n+2} \equiv p^n pp(p * x) \equiv p^n px(x * p) \equiv 0(M)$. Sei hiernach $\bar{\mathscr{S}} := \mathscr{S}/M$. Dann folgt zunächst $\bar{t} \neq \bar{1} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\colon \bar{t}^n = \bar{0}$. Ist nun $\bar{u} \neq \bar{0} \neq \bar{v}$ und $(\bar{u} \cap \bar{v})\,\bar{u}' = \bar{u}$, $(\bar{u} \cap \bar{v})\,\bar{v}' = \bar{v}$, so folgt weiter $\bar{u}' \cap \bar{v}' = \bar{1}$ wegen $(\bar{u} \cap \bar{v})(\bar{u}' \cap \bar{v}') = \bar{u} \cap \bar{v}$ und $E(\bar{u} \cap \bar{v}) = \{\bar{1}\}$. Das liefert aber im Falle $\bar{v}' \neq \bar{1}$ die Beziehung $\bar{u}' = \bar{u}' \cap \bar{0} = \bar{u}' \cap \bar{v}'^m = \bar{1}$ (0.4), so dass $\bar{\mathscr{S}}$

linear geordnet ist. Somit ist $\mathscr{S}$ natürlich positiv totalgeordnet mit $\bar{1} \neq \bar{t} \Rightarrow \bar{t}^n = \bar{0}$ und komplementär, also nach [10] einbettbar in $\mathscr{E}$.

Zu (ii). Wir unterscheiden die Fälle:

$$a^2 \cap b = a \tag{iia}$$

und

$$a^2 \cap b \neq a. \tag{iib}$$

Gilt (iia), erhalten wir mit $\mathscr{S}_b =: \bar{\mathscr{S}}$ ein Bild, in dem $\bar{a} = \bar{a}^2$ und daher nach (ii) für alle $\bar{c} = \bar{a}\bar{x}$ Idempotenz gegeben ist. Das liefert uns aber mit $\bar{\bar{\mathscr{S}}} := \bar{\mathscr{S}}\bar{a}$ einen distributiven Verband als homomorphes Bild, von dem aus wir dann wieder zu einem 2-elementigen Bild gelangen, das a und b trennt.

Gilt hingegen (iib), schliessen wir folgendermassen: Ist $b = ay$, also $a^2 \cap b = a(a \cap y) =: c$, so gilt $a < c \leqslant a^2$, und es werden a und b sicher getrennt, wenn a und c getrennt werden. Wir dürfen deshalb ausgehen von $a < c \leqslant aa$, mit dem Ziel a und c zu trennen.

Dies impliziert zunächst, dass der Filter $X := \{x \mid ax \geqslant c\}$ nicht idempotent sein kann, da wegen $a \in X^n$ sonst die Gleichung $a = a\mathscr{X} = c$ einträte. Deshalb muss $\mathscr{S}$ ein $p \leqslant a$ enthalten, das der Implikation genügt

$$p = qr \wedge aq \geqslant c \Rightarrow ar \ngeqslant c,$$

und wir dürfen $ap = c$ annehmen, da sich diese Eigenschaft auf alle $p_i \leqslant p$ mit $ap_i \geqslant c$ überträgt. Ferner dürfen wir annehmen, dass kein $p_i \leqslant p$ in a einen höheren Exponenten hat als p. Denn sonst könnten wir eine Kette $p > p_1 > \cdots > p_m > \cdots$ bilden, derart, dass die Exponenten der p_i in a jedes $n \in \mathbb{N}$ überschritten. Das heisse aber, dass a in jeder Potenz des von den p_i erzeugten Filters P läge, also $a = a\mathscr{P} = c$ gegeben wäre, mit Widerspruch zu $a \neq c$.

Sei nun p von der genannten Art, insbesondere also $p^m x = a \wedge p^{m+1} \nleqslant a$, und E die Menge allere mit $es = p \wedge as \geqslant c$ für mindestens ein s. Dann kann p kein xe mit $e \in E$ teilen, denn dies führte zunächst zu

$$\begin{aligned} p \leqslant xe \Rightarrow p &= (p \cap x)(p' \cap e) && \text{(nach (0.4))} \\ &= (p \cap x)f && (\text{mit } f \in E), \end{aligned}$$

und daraus ergäbe sich im Falle $fq = p \wedge aq \geqslant c$ weiter

$$p = fq = f(x \cap p \cap q)\,q' = fqq' = pq',$$

was wegen

$$p \leqslant a \ zu \ a(x \cap p) \geqslant a((x \cap p \cap q)\,q') = aq \geqslant c$$

führen würde, mit Widerspruch dazu, dass der Exponent von $x \cap p$ in a den Exponenten von p in a nach Konstruktion nicht überschreitet.

Hiernach betrachten wir das von E erzeugte Ideal I. Dies liefert uns als eine erste wichtige Einsicht, dass $aE = aI$ gegeben ist. Denn mit e und f gehört auch $e \cup f$ zu E, wegen

$$\begin{matrix} eq = p \wedge aq \geqslant c \\ fr = p \wedge ar \geqslant c \end{matrix} \Rightarrow (e \cup f)(q \cap r) = p \wedge a(q \cap r) \geqslant c$$

Weiter gilt wegen $a(e \cap f) \leqslant c$ nach (ii) die Gleichung

$$a(e \cap f) = a(e \cap f)^2,$$

also auch

$$aef = a(e \cap f)(e \cup f) = a(e \cup f).$$

Insbesondere bedeutet dies, dass $p \nleqslant xe$ für alle e aus I, also $\bar{p} \nleqslant \bar{x}$ in $\bar{\mathscr{S}} := \mathscr{S}/I$ erfüllt ist. Wir studieren $\bar{\mathscr{S}}$. Zunächst ist $\bar{p}$ Komplement zu $\bar{a}$ in $\bar{c}$. Denn haben wir $\bar{a}\bar{y} \geqslant \bar{c}$, also $c \leqslant aye$ mit $e \in E$, so folgt $a(p \cap ye) = c$, also $(p \cap ye)f = p$ mit $f \in E$, und damit die Kongruenz

$$p = (p \cap ye)f \equiv p \cap ye \equiv p \cap y.$$

Unter anderem gilt demnach $\bar{a}\bar{x} \neq \bar{c}$ und wegen $\bar{a}\bar{x}^n = \bar{a}\bar{x}$ auch $\bar{p} \notin \bar{J}$, wenn $\bar{J}$ das von $\bar{x}$ in $\bar{\mathscr{S}}$ erzeugte Ideal ist. Gilt dann aber $\bar{x} \in \bar{M}$ für ein bezüglich $\bar{p} \notin \bar{L}$ maximales $\bar{M}$, so liefert $\bar{\mathscr{S}}/\bar{M} =: \bar{\bar{\mathscr{S}}}$ eine Zerlegung von $\bar{\mathscr{S}}$ mit $\bar{\bar{a}} \neq \bar{\bar{c}}$, in der $\bar{\bar{p}}$ ein Atom ist mit $\bar{\bar{p}}^m = \bar{\bar{a}} \wedge \bar{\bar{c}} = \bar{\bar{p}}^{m+1}$. Denn gilt $\bar{\bar{1}} \neq \bar{\bar{z}} \leqslant \bar{\bar{p}}$, so muss $\bar{\bar{z}} = \bar{\bar{p}}$ sein, da sonst $\bar{\bar{a}}\bar{\bar{z}} = \bar{\bar{a}}\bar{\bar{z}}^n \neq \bar{\bar{c}}$, also $\bar{M}$ nicht maximal wäre. Daher liefert uns in dem letzten der betrachteten Fälle [5, (0.4)] die Teilbarkeitshalbgruppe $\bar{\bar{\mathscr{S}}}$ ein homomorphes Bild vom Typ $\mathscr{S}_{m+1}$. ∎

Satz 1 impliziert unmittelbar das

Korollar. *Jede S-vollständige positive Teilbarkeitshalbgruppe ist eine Würfelhalbgruppe.*

Denn ist A ein Filter mit $A^n \supseteq \mathscr{b}$, so folgt $(\bigcap A)^n \leqslant b$, also $(\bigcap A)b = b$ und damit $\mathscr{A}\mathscr{b} = \mathscr{b}$.

Wir wenden uns nun der Frage der vollständigen Einbettbarkeit zu. Hier gilt

Satz 12. *Eine bedingt vollständige Teilbarkeitshalbgruppe $\mathscr{S}$ ist genau dann vollständige Unterteilbarkeitshalbgruppe des Würfels, wenn sie* (SVD), *d.h. die Axiome* (S), (V) *und* (D) *erfüllt und jedes echte Intervall aus $\mathscr{I}(S)$ einen Sprung besitzt.*

Beweis. (a) Die aufgestellte Bedingung ist notwendig, denn: Ist $\mathscr{S}$ einbettbar im Sinne des Satzes, so ist zunächst evidenterweise (SVD) erfüllt. Ferner folgt im Falle a, $b \in I(S) \wedge a < b$ an mindestens einer Stelle der Erweiterung $i(a) = 0 \wedge i(b) = 1$, so dass die Elemente $u := \bigcap x \ (i(x) = 1 \wedge x = x^2 \geqslant a)$ und $v := \bigcup y \ (i(y) = 0 \wedge y = y^2 \leqslant b)$ den Sprung $[u \cap v, u]$ in $I(S)$ liefern.

(b) Die aufgestellte Bedingung ist hinreichend, denn: Nach (0.15) dürfen wir auch hier eine 1 voraussetzen. Sind weiter $a \neq b$ zwei Elemente mit $a < b$, so dürfen wir zunächst annehmen, dass a von Einheiten befreit ist, da wir andernfalls durch die maximale Einheit von a dividieren könnten. Dies bedeutet insbesondere, dass a nur dann idempotent sein kann, wenn $a = 1$ ist. Ist aber $a = 1$, so gibt es ein x zwischen a und b, das nicht idempotent ist, oder wir sind aufgrund der Sprungforderung fertig, da $\mathscr{S}_b$ in diesem Falle einen distributiven Verband darstellt, der den Bedingungen des Satzes genügt.

Daher dürfen wir ausgehen von $a \neq a^2$. Wir unterscheiden nach

$$a^2 \cap b = a \tag{i}$$

und

$$a^2 \cap b \neq a. \tag{ii}$$

Gilt (i) und $b = ax$, so folgt weiter, dass $a = a(a \cap x)$, also $a \cap x = 1$ gegeben ist. Damit erhalten wir dann in $\bar{\mathscr{S}} := \mathscr{S}_{x^2}$ vorab $\bar{a} = \bar{1}$ und $\bar{x} \leqslant \bar{b}$, und es werden $\bar{a}$ und $\bar{b}$ getrennt, wenn $\bar{1}$ und $\bar{x}$ getrennt werden. Dies gelingt aber wie oben, wenn alle y zwischen 1 und x idempotent sind. Deshalb dürfen wir im Falle (i) sogar von einem $\mathscr{S}_{y^2}$ ausgehen, das $\bar{a} = \bar{1} \neq \bar{y} \leqslant \bar{b} \leqslant \bar{y}^2 = \bar{0} \neq \bar{y}$ und (SVD) erfüllt.

Gilt aber (ii), so folgt $a < c = a(a \cap x) \leqslant a^2$, so dass wir von einem $\mathscr{S}_c$ ausgehen dürfen, das $\bar{a} \neq \bar{a}^2 = \bar{c} = \bar{0}$ gewährleistet sowie Axiom (SVD) erfüllt.

Damit sind wir am Ziel, wenn es uns gelingt zu zeigen, dass sich zu jedem $\mathscr{S}_0$ mit $a \neq a^2 = 0$ ein a und 0 trennender grenztreuer Homomorphismus in $\mathscr{E}$ finden lässt, falls $\mathscr{S}_0$ (SVD) erfüllt. Denn dann lassen sich im Falle (i) die Elemente $\bar{y}$ und $\bar{y}^2$ und im Falle (ii) die Elemente $\bar{a}$ und $\bar{c}$ separieren. Sei deshalb $\mathscr{S}_0$ von der gewünschten Art. Dann dürfen wir auch hier a als einheitenfrei annehmen.

Wir zeigen zunächst, dass mit u und v auch $u * v$ idempotent ist, was sich wie folgt ergibt: Es ist mit u und v auch $u \cup v$ idempotent, so dass wir wegen $u * v = u * (u \cup v)$ o.B.d.A. $u < v$ annehmen dürfen. Das liefert weiter mit $u * v =: x$ die Abschätzung $u * (x * x^2) \leqslant u * (x * ux^2) = ux * ux = 1$, also $u(x * x^2) = u$. Daraus folgt dann aber für jedes y mit $y(x * x^2) = x$ zunächst

$uy = u(x * x^2)y = ux = v$, also $x \leqslant y$, so dass sich schliesslich die Beziehung $x^2 = (x * x^2)x \leqslant (x * x^2)y = x$ ergibt.

Aus dem soeben aufgezeigten Sachverhalt resultiert die wichtige Folgerung, dass au mit idempotentem u nur dann gleich 0 sein kann, wenn u gleich 0 ist. Denn, da a einheitenfrei angenommen wurde, gilt die Implikation $(u^2 = u \wedge au = 0) \Rightarrow (a * (u * 0) = 1) \Rightarrow (u * 0 = 1)$.

In Anlehnung an Tarski [11] betrachten wir nun alle Durchschnitte $\bigcap u_i$, die aus jedem Paar von idempotenten Elementen u, v mit $u * 0 = v \wedge v * 0 = u$ genau ein Element berücksichtigen. Ist dann p ein solcher Durchschnitt, so muss $p = 1$ gelten oder aber p ein Atom im Verband $(I(S_0), \cap, \cup)$ darstellen. Denn wäre $1 \neq u = u^2 < p = p^2$, so träte $u * 0 = (u * p)(p * 0)$ ein. Es kann aber nicht $u * 0 = 0$ sein, da es sonst wegen $a * 0 \leqslant a$ zu der Implikation $a * 0 = (a * au)(au * 0) = (a * u)(a * 0) \Rightarrow a * u = 1$ und damit zu $u = 1$ käme. Somit ist wegen (D) eine Darstellung $0 = \bigcup p_i$ mit Atomen p_i aus $(I(S), \cap, \cup)$ gegeben. Das gewährleistet zunächst eine grenztreue subdirekte Zerlegung von $\mathscr{S}_0$ in Komponenten $\mathscr{S}_i$, die (SVD) erfüllen, frei sind von überflüssigen Idempotenten und ein Maximum besitzen. (Denn: man zerlege jedes x in die Komponenten $x \cap p_i$).

Nun ist aber weiter jede "SVD-Teilbarkeitshalbgruppe" "ohne" Idempotente totalgeordnet, denn $(x \cap y)(x * y \cap y * x) = x \cap y \neq 0$ führt zu $x * y \cap y * x = 1$, da $x \cap y$ sonst eine von 1 verschiedene maximale Einheit besässe, und hieraus folgt $x * y = 1 \vee y * x = 1$, da $c \neq 1 \neq d \wedge c \cap d = 1$ wegen $c \cap d^n = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ (0.4) zu $\bigcup d^n \in I(S) \wedge 1 \neq \bigcup d^n \neq 0$ führen würde. Daraus ergibt sich weiter, dass jedes von 1 verschiedene t aus $\mathscr{S}_i$ nilpotent ist in $\mathscr{S}_i$, da sonst alle Potenzen von t unterhalb von $p_i \cap a$ lägen, so dass $\bigcup t^n \in I(S) \wedge 1 \neq \bigcup t^n \neq p_i$ einträte. Das bedeutet insgesamt, dass jedes $\mathscr{S}_i$ stetig, d.h. lückenfrei, natürlich totalgeordnet ist mit $1 \neq t \Rightarrow t^n = 0_i := p_i$, also nach [10] grenztreu einbettbar ist in $\mathscr{E}$. ∎

Wir beenden diese Note mit einem Einbettungssatz für S-vollständige Teilbarkeitshalbgruppen und einem Korollar.

SATZ 13. *Eine positive S-vollständige Teilbarkeitshalbgruppe $\mathscr{S}$ lässt sich genau dann infimumtreu in einen Würfel einbetten, wenn zu jedem Paar a, b mit $b \nleqslant a$ ein $\cup$-irreduzibles Element p existiert mit $p \leqslant b \wedge p \nleqslant a$.*

Beweis. (a) Ist $\mathscr{S}$ einbettbar im Sinne des Satzes, so existiert ein i mit $i(b) > i(a)$. Dann ist aber $p = \bigcap x$ $(i(x) \geqslant i(b))$ $\cup$-irreduzibel mit $p \leqslant b \wedge p \nleqslant a$.

(b) Sei nun $a < b$ und o.B.d.A. $\mathscr{S} = \mathscr{S}_b$. Wir definieren mittels p die Kongruenz:

$$u \equiv v(p) :\Leftrightarrow ux \geqslant p \Leftrightarrow vx \geqslant p.$$

Dann ist $\equiv$ eine S-treue Kongruenz, die sich aufgrund der Irreduzibilität von p als linear erweist. Denn wäre $\bar{u} \nleqslant \bar{v} \wedge \bar{v} \nleqslant \bar{u}$, so gäbe es Elemente x, y mit $p \leqslant ux \wedge p \nleqslant vx$ und $p \nleqslant uy \wedge p \leqslant vy$, was zu $p \leqslant (u \cup v)x \cap (u \cup v)y = u(x \cap y) \cup v(x \cap y)$ führte, mit Widerspruch. Sei nun $\mathscr{S} = \mathscr{S}_b$ wie oben, aber totalgeordnet. Gilt dann $x < b \wedge y < b \Rightarrow xy < b$, so ist offenbar der 2-elementige distributive Verband ein infimumtreues homomorphes Bild von $\mathscr{S}$. Sonst aber gibt es ein $x \neq b$ mit $x^m = b$. Wir betrachten das Infimum p all dieser x und zerlegen im Falle $p^k = b$ (für geeignetes k) $\mathscr{S}$ nach $\{y \mid y < p\}$, hingegen im Falle $p^k \neq b$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, also $p = p^2$, nach $\{y \mid y \leqslant p\}$. Dann erhalten wir in beiden Fällen ein a, b trennendes Bild der gewünschten Art. ∎

Dieser letzte Satz liefert fast unmittelbar das

KOROLLAR. *Jede vollständige infimum-algebraische Teilbarkeitshalbgruppe lässt sich infimumtreu in einen Würfel einbetten.*

Denn ist c kompakt mit $c \geqslant a \wedge c \ngeqslant b$, so liefert das Infimum einer jeden b enthaltenden maximalen Kette c nicht enthaltender Elemente ein $\cup$-irreduzibles Element der gewünschten Art.

LITERATUR

1. I. ARNOLD, Ideale in kommutativen Halbgruppen, *Math. Sb.* **36** (1929), 401–407.
2. G. BIRKHOFF, "Lattice Theory," Amer. Math. Soc. Coll. Publ., No. XXV, 3rd ed., Providence, R. I., 1973.
3. B. BOSBACH, Komplementäre Halbgruppen. Axiomatik und Arithmetik, *Fund. Math.* **64** (1969), 257–287.
4. B. BOSBACH, Schwache Teilbarkeitshalbgruppen, *Semigroup Forum* **12** (1976), 119–136.
5. B. BOSBACH, Zur Theorie der stetigen Teilbarkeitshalbgruppen, *Semigroup Forum* **20** (1980), 299–317.
6. B. BOSBACH, Archimedische Teilbarkeitshalbgruppen und Quaderalgebren, *Semigroup Forum* **20** (1980), 319–334.
7. B. BOSBACH, Zur Theorie der vollständigen Teilbarkeitshalbgruppen, *Semigroup Forum* **25** (1982), 111–124.
8. G. BRUNS, Darstellungen und Erweiterungen geordneter Mengen. I, *J. Reine Angew. Math.* **209** (1962), 167–200; II, **210** (1962), 1–23.
9. A. H. CLIFFORD, Arithmetic and idealtheory in commutative semigroups, *Ann. Math.* **39** (1938), 564–610.
10. A. H. CLIFFORD, Naturally totally ordered commutative semigroups, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 631–646.
11. A. TARSKI, *Fund. Math.* **16** (1929), 195–197.
12. B. L. VAN DER WAERDEN, Zur Produktzerlegung der Ideale in ganzabgeschlossenen Ringen, *Math. Ann.* **101** (1929), 293–308.